ファイナンスにおける
取り引きコストを考慮したリスク回避戦略

指導教官　伏見正則 教授

1997 年 2 月 3 日

氏名　一上響

目次

第 1 章

はじめに

1.1 派生証券とヘッジ

ある証券の経済的価値つまり価格が, より基本的な他の変数 (原資産) の値によって定められるとき, この証券を派生証券 (derivative security) と呼ぶ. 例えば株式オプション (equity option) は, 当該株式の価格に応じて経済価値が決まる一つの派生証券と考えられる.

派生証券の例としてオプションを考えよう. オプションとはある定められた日にある定められた価格で原資産を売買する権利のことで, 購入する権利のことをコールオプション (call option), 売却する権利のことをプットオプション (put option) と呼び, 定められた日を満期 (maturity), 定められた価格を行使価格 (striking price) と言う. また, アメリカンタイプオプションは満期までいつでも権利行使でき, ヨーロピアンタイプオプションは満期においてのみ権利行使が可能であるもののことを言う. 今後本論文では, ヨーロピアンタイプオプションだけを考えることとする.

例として, ある原資産に対する行使価格 100 円, 満期 6ヶ月後のコールオプションを 1 単位購入した場合を考える. もし満期において, この原資産の市場価格が 100 円以上, 例えば 110 円になったとする. このとき権利を行使すれば, この原資産を 100 円で購入することができる. つまりこのコールオプションを購入すれば, この原資産を 6ヶ月後に買う予定の場合, その値上がりのリスクを回避し, その購入価格をせいぜい 100 円にすることができる. またこの 100 円で購入した原資産を市場ですぐさま売却すれば, 差し引き 10 円の利益を得ることができるので, 投機としても利用できる. 一方, 市場価格が 100 円未満であれば, 市場で購入すれば 100 円未満のものをわざわざ 100 円で購入する必要はないので, 権利は行使されない.

一般化する. 満期 T における行使価格 K のコールオプションの価値, つまり満期で得られる支払 (payoff) は, 満期での原資産の価格 S_T に対して,

$$g(S_T) = \{S_T - K, 0\}_+ \tag{1.1}$$

と表現できる. ただしここで $\{\cdot,\cdot\}_+ = \max\{\cdot,\cdot\}$ である. 図にすると図 1.1 のようになる.

この支払関数を変えれば, 様々な派生証券を表現できる. プットオプションとは前述したように, 原資産を売却する権利のことであり, 行使価格 K のプットの支払関数は

$$g(S_T) = \{K - S_T, 0\}_+ \tag{1.2}$$

と表現できる. 図で表すと図 1.2 のようになる.

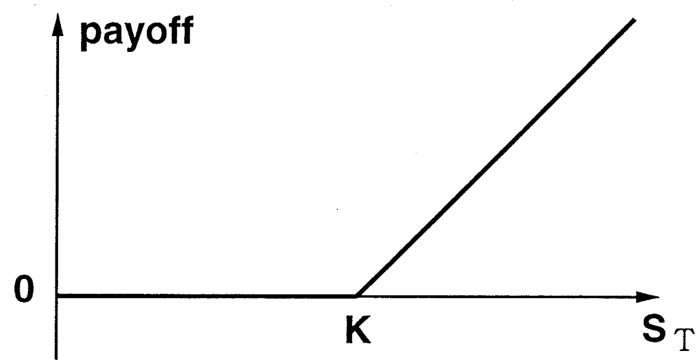

図 1.1: コールオプションの満期での支払

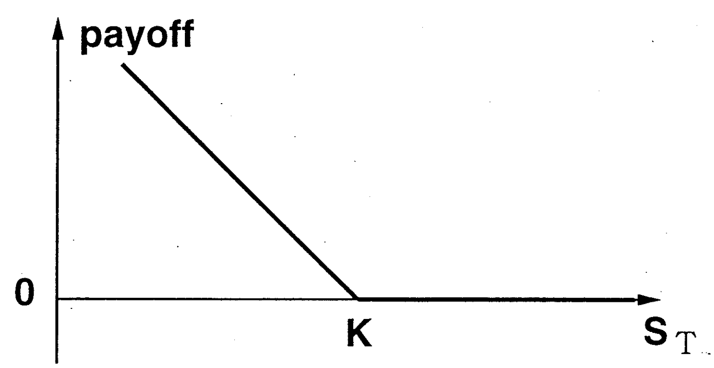

図 1.2: プットオプションの満期での支払

同じ行使価格 K のコールとプットを一つずつ購入した状態をストラドルと呼ぶ．この支払関数は

$$g(S_T) = |S_T - K| \tag{1.3}$$

と表現でき, 図 1.3 のようになる．

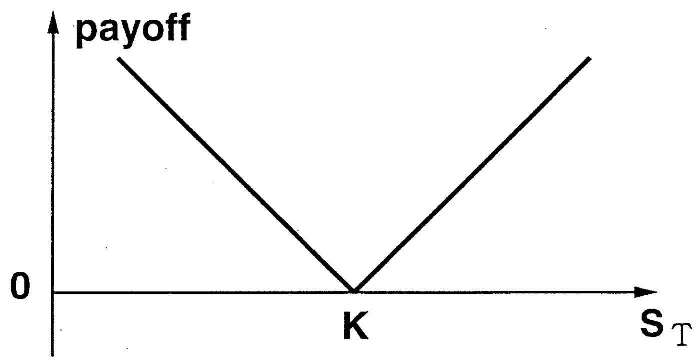

図 1.3: ストラドルの満期での支払

ある行使価格 K に対して, 満期における原資産価格 S_T がそれを越えないときは支払が 0 円, 越えれば X 円というような派生証券をデジタルオプションと言う．その支払関数は

$$g(S_T) = \begin{cases} 0, & S_T < K, \\ X, & S_T \geq K, \end{cases} \tag{1.4}$$

と表現でき, 図 1.4 のように表される．

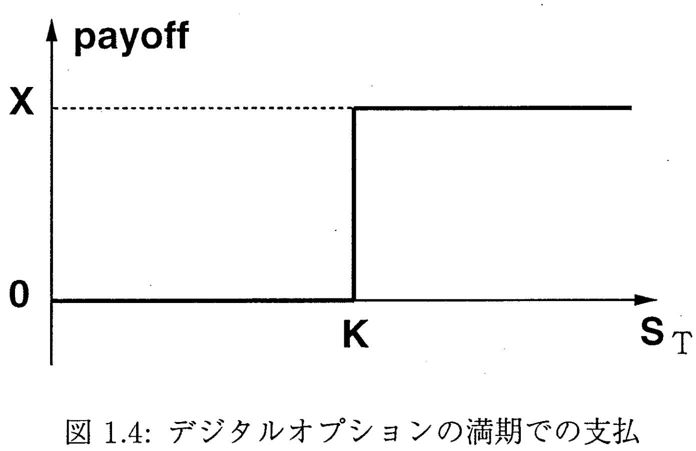

図 1.4: デジタルオプションの満期での支払

このように支払関数 $g(\cdot)$ を変えれば, 無限の種類の派生証券を作ることができる．また原資産としては株式, 通貨, 商品, 金利などなんでもよく, オプションをはじめ派生証券はこういった原資産の変動リスクを常に抱える企業や個人によってそのリスクを回避するために購

入されている．つまり一種の保険のような扱われ方をしている．一方，オプションのような派生証券を売却した側はリスクを負う．よって保険の場合と同様にそのリスクに見合う額を受け取ることができる．この額が派生証券の価格であり，その理論値を求めることが要望されている．これには後に述べるBlack-Scholesモデルなどのモデルがある．これまで紹介してきたようなヨーロピアンタイプの派生証券の場合，その時刻 t における価格は，時刻 t とその時の原資産価格 S_t の関数によって表現される．例えばコールオプションの価値は，図1.5のように原資産価格 S_t に対して単調増加で，満期に近付くとともに支払関数に収束して行く．

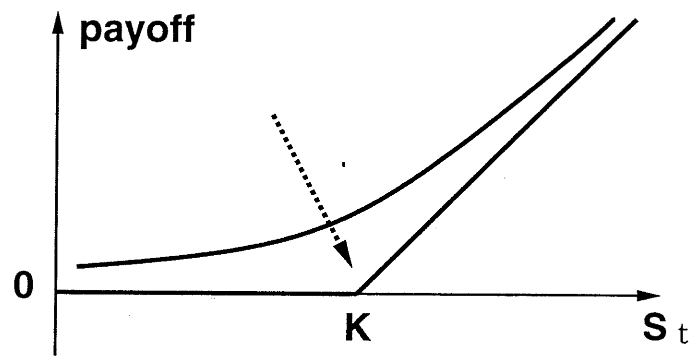

図 1.5: 時刻 t におけるコールオプションの価格関数

リスク回避や投機において非常に便利な派生証券であるが，市場で取り引きされているものは，株，債券，通貨，金属，穀物などの現物の他は一部の商品に先物やオプションがあるだけである(それとても行使価格や満期は限られている．)．これは一つの商品についてある一定以上の売り手と買い手がいないと，望む時に売買ができないという，流動性の問題が生じるためで，市場に無限種類の商品があっても売買が成り立たないことに起因する．しかしながら企業はその企業特有のリスク回避の要望を持っており，市場にあるものだけを使って一般の企業が求めるリスク回避を自ら効果的に低コストで行なうことは非常に困難である．そういったところに銀行や証券会社などの金融機関の大きな収益の機会が生まれる．

顧客のニーズに合わせたオーダーメイドの派生証券は支払関数 $g(\cdot)$ や満期を変えればいくらでも無限に作ることができる．しかしながらこの場合，コールオプションを売却したのと同じように，派生証券を売却した金融機関は無限の支払義務を負う．そこで市場に取り引きされている商品を組み合わせて所持し，その組み合わせを状態に応じて変えていくことによって支払が膨らむリスクを回避することが重要である．このような行為をヘッジ(hedge)と言い，このときの商品の組み合わせをポートフォリオ(portfolio)と呼ぶ．このヘッジにはかなりの専門能力が必要であり，これまでも様々な研究がなされてきている．金融機関はヘッジを問題なく終えることができれば手数料収入を得ることができる．現在金融機関は，金利自由化により利ザヤを稼げなくなってきており，今後はこのヘッジ等の専門技術を生かして手数料収入を増やしていかないといけない状態にある．

1.2 これまでの主な研究と本研究の意義

金融派生証券の価格づけ (pricing) とヘッジ戦略 (hedging strategy) の決定にあたっては, Black-Scholes モデル[1] が, その発表から 20 年以上経た現在でもその単純さや扱いやすさ等の理由から最もよく利用されている.

Black-Scholes モデルの最も大きな特徴は, 無裁定 (no arbitrage) の仮定から派生証券の満期での支払を複製 (duplicate) する自己充足的 (self-financing) なポートフォリオの価値が派生証券の価値に等しいとする点にあるが, このために取り引きコスト (transaction cost) がないことや連続的に取り引きできることを仮定していることも見逃せない. 実際には取り引きするたびに手数料や税金がかかるし, どんな優秀なトレーダーでも連続的にヘッジすることはできない. 従って Black-Scholes モデルにより導かれる価格は現実のものよりも過小評価されており, 一般に実務においては適当に上乗せして価格を決定している. またヘッジ戦略自体もトレーダーのカンに頼られているのが現状である. このようなことから上記のような仮定を緩和したより現実に近いモデルが求められており, 長年に亙って研究されてきている.

現在まで, 取り引きコストを考慮したモデルの研究ではコールオプション (call option) のヘッジを一定時間間隔で行なう場合のものが多い. Leland(1985) はコスト関数が取り引き額に線形比例する場合, Black-Scholes モデルのボラティリティー部分を改良してデルタヘッジすれば, コールオプションとヘッジポートフォリオの価値の乖離がヘッジ時間間隔の 2 乗のオーダーで抑えられることを示した. Boyle and Vorst(1992) は, 二項モデルで表現された株価過程に対して価値の乖離が 0 になることから導いたボラティリティーの改良を提案している. こういった研究も十分意味のあるものではあるが, より一般の派生証券に対して任意の時点でヘッジできるようなときに最適戦略を求めることが現実には必要とされている. すなわち取り引き量が増えるとそのコストが増大するが, 逆にあまり取り引きしなさすぎるとポートフォリオの価値が派生証券の価格から乖離してしまい, ヘッジの意味がなくなってしまう. そこでいつ, どれだけ取り引きするかといったことが重要な問題となってくる. van der Hoek and Platen (1995) のモデルでは, こういった問題をとりあげ, 議論している.

van der Hoek-Platen モデルでは, 自己充足的 (self-financing) の仮定を緩和して mean-self-financing の概念を導入し, 上記の価値の乖離を外からの資金で埋め合わせできるようにする. そしてその資金が大きくなってしまうリスクをコントロールするようにヘッジすることを目的としている. 更にそのような前提のもとでどの程度の間隔でヘッジすれば取り引きコストを小さくできるかを考えている. こういった仮定はかなり現実に即していて扱いやすいものである. しかしながら van der Hoak-Platen モデルには不自然な仮定も多く, 更に拡張する可能性が存在すると考えられる.

van der Hoak-Platen モデルのヘッジ戦略の大きな特徴として, 彼らの論文 [10] の (3.8) 式

$$
\begin{aligned}
(1.5) \qquad P_t(\phi) &= E(X_t(\phi)^2|\mathcal{F}_t) \\
&= E((C_T(\phi) - u(t, S_t))^2|\mathcal{F}_t)
\end{aligned}
$$

で定義される期待二乗誤差 (expected square loss) を最小にすることを目的としていることがある. ここで $C_T(\phi)$ はヘッジ戦略 ϕ をとった場合の満期 T までに生じる累積投入コスト

[1]Black-Scholes モデルについては第 2 章で詳しく述べる.

であり，$u(t,S_t)$ は Black-Sholes モデルから導かれる理論価格式である．これはヘッジに必要な資金と取り引きコストを無視した場合の無裁定価格との期待二乗誤差をなるべく小さくするというような意味だが，この期待二乗誤差が現実的に重要だとは思えない．また [10] は，次のように漸近的なリスク回避度 (risk aversion) を，リスク $R_t(\phi^*,\Delta)$ と取り引きコストの期待値 $U_t(\phi^*)$ の 2 乗の漸近的な比として定義する．

$$\kappa = \lim_{\Delta\to 0} A_t(\phi^*,\Delta) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{(U_t(\phi^*))^2}{R_t(\phi^*,\Delta)} \tag{1.6}$$

これはそれぞれのトレーダーの価値観によって異なるものであるはずだが，[10] の 5,6 章の議論によると一意に決定されてしまっている．そこで本論文ではそれぞれのトレーダーの受け入れられるリスクの上限をあらかじめ決めておき，リスクがその上限に達したときに，そのリスクを最小にするようにヘッジする戦略を考える．

またモデルの拡張のアイデアの一つとして，コスト関数の形状をより一般的なものにすることを考える．van der Hoak and Platen モデルを含めこれまでの研究では取り引きコストが定額か取り引き量に線形的に比例するものしか扱ってこなかった．しかしながら実際には volume discount がきくからコスト関数は取り引き額に対して凹性をもつとする方が妥当である．そこで本論文では (4.7) 式のようにコスト関数を仮定して最適戦略を考えることにする．

更にこのコストはブローカーから見た場合の手数料収入となるわけだが，これを最大にする形状について考察する．日本でも近々取り引きコストが自由化されることが予想されるが，そのような時代の流れの中で証券会社等ブローカーは大口投資家に対する取り引きコストをいかに決定すれば良いのか模索中である．本論文における研究はこのような問題に対する一つの方向性を示すものと思われる．

本論文の構成は次の通りである．第 2 章では Black-Scholes モデルの理論を述べ，本論文で基本となる無裁定や自己充足的ポートフォリオなどの概念を説明する．その後，派生証券の理論価格式を導き，デルタヘッジについて説明する．それから実際の様々な派生証券の価格式やヘッジ戦略を導く．第 3 章では Leland モデル及び Boyle-Vorst モデルの解説をする．第 4 章は本論文の中心であるリスクコントロールヘッジモデル (RCH モデル) について述べる．第 5 章では数値実験をするに当っての準備について説明する．第 6 章では数値実験の結果を示し，その結果から得られた RCH モデルの改良のアイデアについて述べる．第 7 章では改良後の RCH モデルを，様々な派生証券，取り引きコスト関数について，他のモデルと比較実験をした結果を示す．第 8 章では，第 7 章で得られた結果を踏まえ，そのような結果が得られた理由について考察し，今後の課題を述べる．最適コスト関数については付録で述べる．

第 2 章

Black-Scholes モデル

2.1 Black-Scholes モデルとその仮定

1973 年に Black と Sholes は株式のヨーロピアンコールオプションの価格が無裁定を仮定することにより一意に求められることを導いた．同様の原理から，より一般的な派生証券の理論価格式が求めらる．ここではこれらを総称して Black-Scholes モデルと呼ぼう．この章では，現在の派生証券の分野において欠かすことのできない Black-Scholes モデルについて述べ，派生証券の理論価格を導くことを目的とする．Black-Scholes モデルにおいては次のことが仮定されている．

1. 市場では，危険証券と安全証券が一種ずつ取り引きされている．
2. 株価は幾何ブラウン運動に従う．
3. 空売り (short sale) 制限がない．
4. 取り引きコストがない．
5. 全証券は完全に分割可能．つまり非整数枚の証券を所持できる．
6. 株式配当なし．
7. 裁定機会は存在しない．[1]
8. 取り引きは連続的に実施される．
9. 安全利子率はその投資期間に関わらず一定．
10. 全ての派生証券は自己充足的 (self-financing) なポートフォリオにより複製される．[2]

Black-Scholes モデルはその理解し易さ，ヘッジ等への応用の容易さなどから現在でも最もよく使用されているモデルであるが，上記のように非現実な仮定も多く，これらを緩和したより現実に近いモデルが要望されている．[3]

---

[1] この条件を無裁定条件と言い，これは将来において同等の価値を有する二物は現在においても同価値でなければならないということを意味する．

[2] この条件を市場の完備性 (completeness) と言う．厳密に言えば現実の市場は完備ではなく，よって非完備な場合の研究も多くなされているが，本論文では完備な市場だけを扱う．

[3] 例えば，ボラティリティーが確率的に変動することによって市場が非完備 (incomplete) になる場合の Black-Scholes モデルの拡張については，Kijima and Yoshida[8] などを参照．

2.2 モデルの概要

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ をとる．ここで Ω は無限連続で，市場で可能な状態 (ここでは危険証券の価格過程) の集合と解釈される．またすべての $\omega \in \Omega$ について $P(\omega) > 0$ が成り立つとする．ここで確率測度 P と Q が同値であるとは，すべての $\omega \in \Omega$ について

$$P(\omega) > 0 \Leftrightarrow Q(\omega) > 0 \tag{2.1}$$

が成立することを言う． $P(\omega)$ は状態が ω となる (投資家から見た) 主観的確率であり，投資家によって異なる．このことは投資家は何が起こり得るかについては同意しているが，その確率評価は必ずしも一致しないことを示している．

証券 (security) は連続的に取り引きされ, 時刻 T においてすべての取り引きは終了する．この確率空間上の標準ブラウン運動を $\{W_t;\ 0 \leq t \leq T\}$ と書き, このブラウン運動から生成される標準的な可算加法族を

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s;\ 0 \leq s \leq t\} \tag{2.2}$$

とする．これは常に

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t, \quad 0 \leq s \leq t \leq T \tag{2.3}$$

を満たし，時とともに投資家にとっての情報が増えていくと解釈できる． $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ としても一般性は失わない．

一つの危険証券と一つの安全証券がある市場において, 満期 T でのみ支払が発生する派生証券を考える．危険証券とは株式のように将来の価格が確率的にしか予測できない証券で，これを購入した投資家はリスクを負うことになる．安全証券とは国債のように将来得られる額が決定されており，かつ普通債務不履行に陥らないような証券で, 金利が一定であればその現在価値は一意に決まる．今後はイメージを掴み易いように, 危険証券を株式, 安全証券を債券と呼ぶことにする．

株式の価格過程として，確率過程 $S = \{S_t;\ 0 \leq t \leq T\}$ を考える．これは常に正で $\{\mathcal{F}_t;\ 0 \leq t \leq T\}$ に適合するとする． $\{\mathcal{F}_t;\ 0 \leq t \leq T\}$ に適合するとは，任意の t に対し関数 $\omega \to S_t(\omega)$ が $\mathcal{F}_t$ で可測あることである．ここで適合性は時刻 t において投資家が株式の過去及び現在の価格を知っていることに対応する．また時刻 t から見た期待値を $E(\cdot|\mathcal{F}_t)$ で表す．ただし $E(\cdot|\mathcal{F}_0) = E(\cdot)$ と省略して表す． Black-Scholes モデルでは, 株式の価格過程 $S = \{S_t;\ 0 \leq t \leq T\}$ が確率微分方程式

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{2.4}$$

を満たすと仮定する．ここで μ, σ は定数で, それぞれ期待収益率, ボラティリティーと呼ばれる．これは収益率[4] (return) がブラウン運動に従うことを意味しており，ある程度現実的な仮定であると思われる．これを解くと

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \tag{2.5}$$

[4]投資額に対する収益の比率.

となる．

一方，債券の価格過程 $\{B_t;\ 0 \le t \le T\}$ は微分方程式

$$\frac{dB_t}{B_t} = r dt \tag{2.6}$$

を満たすとする．ここで r は安全利子率を表す．これを解くと

$$B_t = B_0 e^{rt} \tag{2.7}$$

となる．これは株式と異なり決定的な値となることから，確実な利回りが期待できる証券と考えられる．

取り引き戦略 (trading strategy) は 2 次元 $\{\mathcal{F}_t;\ 0 \le t \le T\}$ 適合過程 $(\xi, \eta) = \{(\xi_t, \eta_t)\,;\ 0 \le t \le T\}$ で表され，これをポートフォリオと呼ぶ． ξ_t, η_t はそれぞれ時刻 t に保有する株式，債券の枚数と解釈される． ξ_t や η_t が負であることは，時刻 t において空売りされていることを意味する．ここでの適合性はそれまでの履歴 $\mathcal{F}_t$ から決定されなければならないこと，つまり未来の情報を使って戦略を立てることができないことに対応する．

2.3 自己充足的ポートフォリオ

時刻 t におけるポートフォリオの価値は

$$V_t = \xi_t S_t + \eta_t B_t \tag{2.8}$$

と表せる．ここでポートフォリオの価値の変化が

$$V_t - V_0 = \int_0^t \xi_s dS_s + \int_0^t \eta_s dB_s \tag{2.9}$$

すなわち $(0,t)$ における累積の利益 (負なら損失) で与えられるなら，このポートフォリオは自己充足的 (self-financing) であると言う．これは投資期間中，つまり満期までに資金の回収や追加がないことを意味する．

2.4 複製と無裁定

満期 T での株価 S_T 上に書かれた派生証券の支払金額を

$$H = g(S_T) \tag{2.10}$$

で表す．例えば，行使価格 K のヨーロピアンコールオプションの場合は，

$$g(S_T) = \{S_T - K, 0\}_+ \tag{2.11}$$

となる．また任意の状態 $\omega \in \Omega$ に対して，

$$H = V_T \tag{2.12}$$

を恒等的に満たすような自己充足的ポートフォリオ (ξ,η) が存在するならば, (ξ,η) は派生証券 H を複製 (duplicate) していると言う．このとき無裁定条件[5] により, 派生証券 H の時刻 t における価格は

$$u(t,S_t) = V_t = \xi_t S_t + \eta_t B_t \tag{2.13}$$

と表せる．[6]

2.5 リスク中立測度

ここでは測度変換によってリスク中立測度を求めることを目的とする．

$$\mathcal{L}_2 = \{H;\ E(H^2) < \infty\} \tag{2.14}$$

$$\mathcal{H}_2 = \{(\xi,\eta);\ E(\int_0^T |\xi_t S_t|^2 dt) < \infty\} \tag{2.15}$$

とすると, 派生証券 $H \in \mathcal{L}_2$ が自己充足的なポートフォリオ $(\xi,\eta) \in \mathcal{H}_2$ によって複製可能なことは分かっている．[7] そこで

$$Y_t = \exp(\beta W_t - \frac{\beta^2}{2}t), \quad t \in [0,T], \quad \beta = -\frac{\mu - r}{\sigma} \tag{2.16}$$

に対して

$$\tilde{P}(A) = E(I_A Y_T), \quad A \in \mathcal{F}_T \tag{2.17}$$

により定義される確率測度を考える．ただしここで

$$I_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.18}$$

である．このとき Girsanov の定理から $\tilde{P}$ は P と同値, すなわち

$$P(A) > 0 \Leftrightarrow \tilde{P}(A) > 0 \tag{2.19}$$

であり, Y_t はマルチンゲールとなり,

$$\tilde{W}_t = W_t - \beta t, \quad t \in [0,T] \tag{2.20}$$

---

[5]現在において仮に派生証券を複製したポートフォリオの方が派生証券自身よりも安いとすると, ポートフォリオを買って派生証券を売れば将来の支払は相殺されるので無リスクでその差額をただちに得ることができる．逆も同様であり, このように無リスクにも関わらず利益を得ることができる機会を裁定機会と言う．必ず儲かるならば誰もがこの戦略をとるはずであり, このとき安い方を買い, 高い方を売るからその価格差はすぐに縮まる．よって裁定機会が生じてもすぐに消滅する．このことからヘッジ戦略を立てる上ではこの裁定機会のないことを仮定する．この無裁定条件は Black-Scholes モデルの最も重要な特徴である．

[6]時刻 t における派生証券の価値が t とその時の株価 S_t にだけ依存することは証明されている．

[7]Harrison and Pliska[7] 参照

で定義される確率過程 $\{\tilde{W}_t;\ 0 \le t \le T\}$ は $\tilde{P}$ に関して標準ブラウン運動となる．また (2.2)
4
より

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma(\tilde{W}_t + \beta t) = r dt + \sigma \tilde{W}_t \tag{2.21}$$

となる．[8]以下では確率測度 $\tilde{P}$ に関する期待値を $\tilde{E}$ で表す．

2.6 相対価格とマルチンゲール測度

債券価格 B_t に対する株式の相対価格[9]を

$$S_t^* = \frac{S_t}{B_t} = \frac{1}{B_0} e^{-rt} S_t, \quad t \in [0,T] \tag{2.22}$$

のように定義する．

$\{S_t^*;\ 0 \le t \le T\}$ が $\tilde{P}$ に関してマルチンゲールであることを示そう．(2.6) から

$$dS_t^* = d(\frac{S_t}{B_t}) = \frac{dS_t B_t - S_t dB_t}{B_t^2} = \frac{dS_t}{B_t} - r S_t^* dt \tag{2.23}$$

とできるから, (2.4) より

$$dS_t^* = \frac{\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t}{B_t} - r S_t^* dt = \mu S_t^* dt + \sigma S_t^* dW_t - r S_t^* dt \tag{2.24}$$

が得られる．よって $\tilde{W}_t$ の定義により

$$\frac{dS_t^*}{S_t^*} = \sigma d\tilde{W}_t \tag{2.25}$$

が成立し, この確率微分方程式の解は

$$S_t^* = S_0^* \exp(-\frac{\sigma^2}{2} t + \sigma \tilde{W}_t), \quad t \in [0,T] \tag{2.26}$$

で与えられる．このとき任意の $v \in (t,T]$ に対して

$$\tilde{E}(S_v^* | \mathcal{F}_t) = S_t^* \exp(-\frac{\sigma^2(v-t)}{2}) \tilde{E}(\exp(\sigma(\tilde{W}_v - \tilde{W}_t)) | \mathcal{F}_t) \tag{2.27}$$

であるが, ブラウン運動の独立増分性と, $\tilde{P}$ に対して $\tilde{W}_v - \tilde{W}_t$ が正規分布 $N(0, v-t)$ に従うことから

$$\tilde{E}(\exp(\sigma(\tilde{W}_v - \tilde{W}_t)) | \mathcal{F}_t) = \exp(\frac{\sigma^2(v-t)}{2}) \tag{2.28}$$

[8]一般に株式の期待収益率はリスクを負う分だけ安全利子率より大きくなくてはならない．しかしながら (2.21) より確率測度 $\tilde{P}$ の下では, 株式の瞬間的な期待収益率が安全利子率 r と等しいことが示される．このため $\tilde{P}$ の確率測度を持つ投資家がはリスクに関して無関心で収益率のみによって証券を評価すると考えられる．よって確率測度 $\tilde{P}$ はリスク中立測度 (risk neutral measure) と呼ばれている．

[9]債券価格に対する比を相対価格と言う．債券を購入すれば誰でも無リスクで安全利子率分の金利収入を得られることから貨幣自身の価値が減少していく．よって異なる時点での価値を比較するには, 貨幣で測った名目価値ではなく, 相対価格を使わなければならない．債券自身の相対価格は常に 1 である．

となる．これと (2.27) とより，

$$\tilde{E}(S_v^*|\mathcal{F}_t) = S_t^* \tag{2.29}$$

であるから，$\{S_t^*;\ 0 \le t \le T\}$ は，$\tilde{P}$ に関してマルチンゲールである．このことから $\tilde{P}$ はマルチンゲール測度とも呼ばれる．

2.7　派生証券の理論価格式

派生証券 $H \in \mathcal{L}_2$ の理論価格式を導く． H を複製する自己充足的なポートフォリオを $(\xi, \eta) \in \mathcal{H}_2$ とおく．このポートフォリオの相対価格は (2.8) より，

$$V_t^* = \xi_t S_t^* + \eta_t \tag{2.30}$$

で与えられ，(2.23) と同様にして

$$dV_t^* = \frac{dV_t}{B_t} - rV_t^* dt \tag{2.31}$$

が成立する．一方 (2.9), (2.6) から

$$dV_t = \xi_t dS_t + \eta_t dB_t = \xi_t dS_t + r\eta_t B_t dt \tag{2.32}$$

が成立するから，(2.31) は

$$dV_t^* = \xi_t \frac{dS_t}{B_t} + r\eta_t dt - rV_t^* dt \tag{2.33}$$

となる．よって (2.23), (2.30) とより

$$dV_t^* = \xi_t dS_t^* + r(\xi_t S_t^* + \eta_t)dt - rV_t^* dt = \xi_t dS_t^* \tag{2.34}$$

が得られる．これは積分形式で

$$V_v^* = V_t^* + \int_t^v \xi_s dS_s^*, \quad 0 \le t \le v \le T \tag{2.35}$$

となる． $\{S_t^*;\ 0 \le t \le T\}$ が確率測度 $\tilde{P}$ に関してマルチンゲールであるから

$$\tilde{E}(\int_t^v \xi_s dS_s^* | \mathcal{F}_t) = 0, \quad 0 \le t \le v \le T \tag{2.36}$$

が成立する．これと (2.35) から

$$\tilde{E}(V_v^*|\mathcal{F}_t) = V_t^*, \quad 0 \le t \le v \le T \tag{2.37}$$

とできるから $\{V_t^*;\ 0 \le t \le T\}$ は確率測度 $\tilde{P}$ に関してマルチンゲールとなる．これより

$$\tilde{E}(V_T^*|\mathcal{F}_t) = V_t^* \tag{2.38}$$

とでき, 従って

$$\tilde{E}(\frac{V_T}{B_T}|\mathcal{F}_t) = \frac{V_t}{B_t} \tag{2.39}$$

となるから, (2.13), (2.12), (2.10), (2.7) より求める派生証券 $H \in \mathcal{L}_2$ の時刻 t における価格は

$$u(t,S_t) = V_t = B_t\tilde{E}(\frac{H}{B_T}|\mathcal{F}_t) = \tilde{E}(e^{-r(T-t)}g(S_T)|\mathcal{F}_t) \tag{2.40}$$

で与えられる. つまり派生証券の理論価格は満期における支払を現在価値に割り引いて, リスク中立測度で期待値をとったものとして求めることができる.

2.8 デルタヘッジ

ここではBlack-Scholesモデルから導かれる最も基本的なヘッジ手法であるデルタヘッジについて述べる. 派生証券 $H \in \mathcal{L}_2$ の時刻 t における価格式 $V_t = u(t,S_t)$ に伊藤の公式を適用すると, (2.21) より

$$dV_t = \frac{\partial u(t,S_t)}{\partial S_t}\sigma S_t d\tilde{W}_t + (\frac{\partial u(t,S_t)}{\partial S_t}rS_t + \frac{\partial u(t,S_t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,S_t)}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2)dt \tag{2.41}$$

となり, (2.31) より

(2.42)
$$dV_t^* = \frac{\partial u(t,S_t)}{\partial S_t}\sigma S_t^* d\tilde{W}_t + \frac{1}{B_t}(\frac{\partial u(t,S_t)}{\partial S_t}rS_t + \frac{\partial u(t,S_t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,S_t)}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - ru(t,S_t))dt$$

が得られる. $\{V_t^*;\ 0 \le t \le T\}$ は $\tilde{P}$ に関してマルチンゲールであるから上式のドリフト項は0でなくてはならない. よって

$$\frac{\partial u(t,S_t)}{\partial S_t}rS_t + \frac{\partial u(t,S_t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,S_t)}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - ru(t,S_t) = 0 \tag{2.43}$$

が成立する. これはBlack-Scholes微分方程式と呼ばれる.

またこのとき (2.25) より

$$dV_t^* = \frac{\partial u(t,S_t)}{\partial S_t}\sigma S_t^* d\tilde{W}_t = \frac{\partial u(t,S_t)}{\partial S_t}dS_t^* \tag{2.44}$$

となり, これを (2.34) と比較すると

$$\xi_t = \frac{\partial u(t,S_t)}{\partial S_t} \tag{2.45}$$

となる. これはデルタと呼ばれ, 派生証券の理論価格式 $u(t,S_t)$ が求まっていれば計算可能である. 以上より, 株式の枚数が常にこの値になるようにポートフォリオを変え続ければ,

無リスクで派生証券を複製できる．このようなヘッジをデルタヘッジと言う．このとき債券の枚数は, (2.8) から

$$\eta_t = \frac{1}{B_t}(u(t,S_t) - \frac{\partial u(t,S_t)}{\partial S_t} S_t) \tag{2.46}$$

となる．

さらにデルタを S_t で偏微分したもの

$$\frac{\partial \xi_t}{\partial S_t} = \frac{\partial^2 u(t,S_t)}{\partial S_t^2} \tag{2.47}$$

はガンマと呼ばれる．これが大きいとデルタの株価に対する変動率が大きくなるため, デルタヘッジの難しさの指標としてよく用いられる．

2.9 コールオプションの理論価格式

ここではコールオプションの理論価格式 $u_C(t,S_t)$ を求める．満期での支払は (2.11) のようになるから, (2.40) より

$$\begin{aligned}
u_C(t,S_t) &= \tilde{E}(e^{-r(T-t)}\{S_T - K, 0\}_+ | \mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_t e^{\nu(T-t)+\sigma x} - K, 0\}_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_t e^{\nu(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y} - K, 0\}_+ \phi(y) dy
\end{aligned} \tag{2.48}$$

となる．ただしここでは

$$\nu = r - \frac{\sigma^2}{2} \tag{2.49}$$

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \tag{2.50}$$

である．ここで

$$d = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + r(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} \tag{2.51}$$

とおくと

$$S_t e^{\nu(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y} \geq K \Leftrightarrow y \geq -(d - \sigma\sqrt{T-t}) \tag{2.52}$$

とできるから, (2.48) は

$$\begin{aligned}
&u_C(t,S_t) \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{-(d-\sigma\sqrt{T-t})}^{\infty} (S_t e^{\nu(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y} - K) \phi(y) dy \\
&= S_t e^{-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}} \int_{-(d-\sigma\sqrt{T-t})}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T-t}y} \phi(y) dy - K e^{-r(T-t)} \int_{-(d-\sigma\sqrt{T-t})}^{\infty} \phi(y) dy \\
&= S_t \int_{-d}^{\infty} \phi(z) dz - K e^{-r(T-t)} \Phi(d - \sigma\sqrt{T-t}) \\
&= S_t \Phi(d) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d - \sigma\sqrt{T-t})
\end{aligned} \tag{2.53}$$

となり, 理論価格式が得られた. ただしここで

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(y)dy \tag{2.54}$$

である.

またデルタ, ガンマを計算するとそれぞれ

$$\frac{\partial u_{\mathrm{C}}(t, S_t)}{\partial S_t} = \Phi(d), \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial^2 u_{\mathrm{C}}(t, S_t)}{\partial S_t^2} = \frac{\phi(d)}{S_t \sigma \sqrt{T-t}} \tag{2.56}$$

となる.

2.10 その他の派生証券の理論価格式

ここでは第 1 章で紹介した派生証券の理論価格式, デルタ, ガンマを示していく.

2.10.1 プットオプション

行使価格 K のプットの理論価格式 $u_{\mathrm{P}}(t, S_t)$ は, コールの場合と同様にして求めることもできるが, 次のようにすれば簡単である.

$$\{S_T - K\}_+ - \{K - S_T\}_+ = S_T - K \tag{2.57}$$

であるから, この両辺に $e^{-r(T-t)}$ をかけ, 測度 $\tilde{P}$ で期待値を取れば,

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{C}}(t, S_t) - u_{\mathrm{P}}(t, S_t) &= \tilde{E}(e^{-r(T-t)} S_T | \mathcal{F}_t) - e^{-r(T-t)} K \\ &= S_t - e^{-r(T-t)} K \end{aligned} \tag{2.58}$$

となり,

$$u_{\mathrm{P}}(t, S_t) = u_{\mathrm{C}}(t, S_t) - S_t + e^{-r(T-t)} K \tag{2.59}$$

が導ける. よってデルタは

$$\frac{\partial u_{\mathrm{P}}(t, S_t)}{\partial S_t} = \Phi(d) - 1, \tag{2.60}$$

となる. またガンマは,

$$\frac{\partial^2 u_{\mathrm{P}}(t, S_t)}{\partial S_t^2} = \frac{\phi(d)}{S_t \sigma \sqrt{T-t}} \tag{2.61}$$

とコールの場合と同じになる.

2.10.2 ストラドル

行使価格 K のストラドルは, コールとプットを一つずつ持ったものと同価値であるから, その理論価格式 $u_{\mathrm{S}}(t, S_t)$ は,

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{S}}(t, S_t) &= u_{\mathrm{C}}(t, S_t) + u_{\mathrm{P}}(t, S_t) \\
&= 2u_{\mathrm{C}}(t, S_t) - S_t + e^{-r(T-t)}K
\end{aligned} \tag{2.62}
$$

となる. よってデルタ, 及びガンマは,

$$
\frac{\partial u_{\mathrm{S}}(t, S_t)}{\partial S_t} = 2\Phi(d) - 1, \tag{2.63}
$$

$$
\frac{\partial^2 u_{\mathrm{S}}(t, S_t)}{\partial S_t^2} = 2\frac{\phi(d)}{S_t\sigma\sqrt{T-t}} \tag{2.64}
$$

となる.

2.10.3 デジタルオプション

行使価格 K, 支払額 X のデジタルオプションの理論価格式は,

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{d}}(t, S_t) &= \tilde{E}(e^{-r(T-t)}X \cdot 1_{S_T \geq K} | \mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)}X \int_{-(d-\sigma\sqrt{T-t})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= e^{-r(T-t)} X \Phi(d - \sigma\sqrt{T-t})
\end{aligned} \tag{2.65}
$$

となる. よってデルタとガンマは,

$$
\frac{\partial u_{\mathrm{d}}(t, S_t)}{\partial S_t} = e^{-r(T-t)} \frac{X\phi(d-\sigma\sqrt{T-t})}{S_t\sigma\sqrt{T-t}} \tag{2.66}
$$

$$
\frac{\partial^2 u_{\mathrm{d}}(t, S_t)}{\partial S_t^2} = -e^{-r(T-t)} \frac{Xd\phi(d-\sigma\sqrt{T-t})}{S_t^2\sigma^2(T-t)} \tag{2.67}
$$

となる.

第 3 章

Leland モデルと Boyle and Vorst モデル

この章では取り引きコストを考慮した過去のモデルの中でも Leland(1985) と Boyle and Vorst (1992) のモデルについて述べる．これらのモデルは双方とも以下の場合に対するものである．

1. 取り引きの時間間隔一定,
2. コールオプションの売り (short position) に対するヘッジ,
3. 取り引きコスト関数が株式の取り引き額に線形比例し, 債券には取り引きにはコストがかからない.

この場合のように取り引きが離散的にしかできないときには, Black-Scholes モデルのようにデルタを連続的に変えることができない．よって取り引き (ポートフォリオの組変え) をしない間に派生証券価値とヘッジポートフォリオの価値が乖離してしまうため, 満期における支払 $H = g(S_T)$ をヘッジポートフォリオで完全には複製できない．このときの戦略として, 単に離散的にデルタを変える離散的デルタヘッジとでもいうようなものをすることも考えられる．ここでは, このように一定時間間隔でデルタを変える戦略モデルを, 一定時間間隔モデル (constant time interval, 以後 CTI モデル) と呼ぶことにする．

本章で紹介する両モデルは, このような場合に, この複製における誤差をなるべく小さくするということを目的にしており, CTI モデルよりも優れていると言われている．結論としては, 両モデルともボラティリティーを取り引き時間間隔や取り引き額に対するコストの比率に従って改良し, 従来のものに代えてこのボラティリティーを Black-Scholes モデルの無裁定価格式 (2.53) 及びデルタの式 (2.55) に代入してこれらを求め, 離散的にデルタヘッジを行なうというものである．

その具体的なボラティリティーの改良に言及する前に, まず双方のモデルに共通の記号を定義しておく．満期 T に対して, 取り引き可能な時間を

$$\tau_0 = 0, \tau_1 = \Delta_0, \dots, \tau_i = i\Delta_0, \dots, \tau_M = M\Delta_0 = T \tag{3.1}$$

のように M 等分におく．ここで $\Delta_0 = \frac{T}{M}$ は取り引き時間間隔である．また時刻 τ_i における株式の価格を S_{τ_i}, その所持枚数を ξ_{τ_i} とする．ただし $\xi_{\tau_{-1}} = 0$ である．このとき取り引きコスト関数は

$$\Lambda_{\tau_i} = kS_{\tau_i}|\xi_{\tau_i} - \xi_{\tau_{i-1}}| \tag{3.2}$$

のように定義できる．ここで k は定数で, 取り引き額に対するコストの比率を意味する．

Leland は, ボラティリティーを

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2\left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{\sigma\sqrt{\Delta_0}}\right) \tag{3.3}$$

を満たすような $\hat{\sigma}$ に置き換えて理論価格, デルタを計算し, デルタ・ヘッジを行なえば, 満期における支払 H とヘッジ・ポートフォリオ V_T の誤差は取り引き間隔 Δ_0 の二乗のオーダーで抑えられることを示した.

Boyle and Vorst は, Black-Scholes の株価過程 (2.4) を離散近似した時間幅 Δ_0 の二項モデル[1]に対して満期における支払 H とヘッジポートフォリオ V_T の誤差が 0 になるという条件から, ボラティリティーが

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2\left(1 + \frac{2k}{\sigma\sqrt{\Delta_0}}\right) \tag{3.4}$$

となることを導いた.

[1]二項モデルについては第 5 章で述べる.